第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

要点 ①　恒等式

「方程式」… 含まれている文字に，ある特定の値を代入したときだけ成り立つ等式

「恒等式」… 含まれている文字に，どのような値を代入しても成り立つ等式

例　$(x+3)(x-2)=0$　…　方程式

　　$(x+3)(x-2)=x^2+x-6$　…　恒等式

展開や因数分解の公式など，式の変形によって両辺が同じ式になる等式は，すべて恒等式である。

a，b，c を定数とするとき，等式 $ax^2+bx+c=3x^2+4x+5$ が x についての恒等式であるための条件を考える。この等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても成り立つ。よって，$x=0$，1，-1 を代入すると

$$c=5,\ a+b+c=12,\ a-b+c=4$$

この連立方程式を解くと，$a=3$，$b=4$，$c=5$ である。

逆に，$a=3$，$b=4$，$c=5$ のとき，明らかにこの等式は x についての恒等式である。

一般に，次のことが成り立つ。

恒等式の性質

多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ について

　$P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式　⇔　$P(x)$ と $Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致

　$P(x)=0$ が x についての恒等式　⇔　$P(x)$ の各項の係数がすべて 0

特に，x の 2 次式について

　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式　⇔　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

　$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式　⇔　$a=0$，$b=0$，$c=0$

※一般に，$P(x)$ と $Q(x)$ が x についての n 次(以下)の多項式であるとき，等式 $P(x)=Q(x)$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，この等式は x についての恒等式である。

【MEMO】

1　等式 $2x^2-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

Point Pickup

恒等式の係数を決定する

同類項をまとめ，両辺の同じ次数の項の係数を「＝」で結ぶ。

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式　$\Leftrightarrow$　$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

第 2 講　PART1 確認問題

1　等式 $3x^2+8x+2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$a=$ ア，$b=$ イ，$c=$ ウエ

第 2 講　式と証明

PART1　恒等式

1　等式 $2x^2-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

[解答]

等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2-1=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

これが x についての恒等式となるのは

$$2=a,\quad 0=-2a+b,\quad -1=a-b+c$$

これを解くと　$a=2$，$b=4$，$c=1$

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウエ：-3

[解説]

等式の右辺を x について整理すると

$$(\text{右辺}) = a(x+1)^2+b(x+1)+c$$
$$= ax^2+2ax+a+bx+b+c$$
$$= ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$

これより

$$3x^2+8x+2 = ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$

これが x についての恒等式であるとき

$$3=a,\ 8=2a+b,\ 2=a+b+c$$ [A]

これを解くと

$$\boldsymbol{a=3,\ b=2,\ c=-3}$$

[A]　恒等式の性質
$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が
x についての恒等式
$\Longleftrightarrow$ $a=a',\ b=b',\ c=c'$